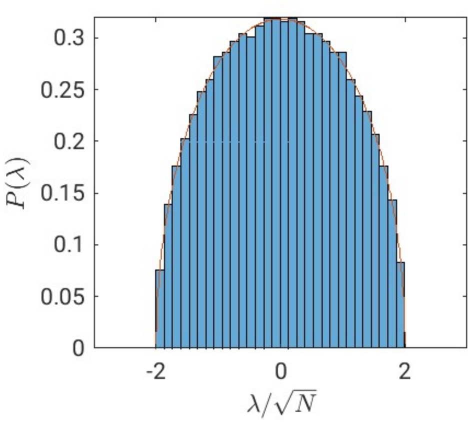
Seminar Zufallmatrizen

Dieses Seminar gibt eine Einführung in die faszinierende Welt der Zufallsmatrizen und ihre Anwendungen in verschiedenen Bereichen der Mathematik und Physik.

Wie bereits der Name vermuten lässt, ist eine Zufalsmatrix eine matrixwertige Zufallsvariable. Bei großen Datenmengen oder Systemgrößen können Abhängigkeiten oft nicht mehr deterministisch bestimmt werden und müssen dann über Wahrscheinlichkeitsverteilungen modeliert werden. Deshalb spielen Zufallsmatrizen eine wichtige Rolle beim Studium komplexer Systeme und sie finden in vielen Feldern Anwendung. Prominente Beispiele sind die Quantenphysik, die Physik ungeordneter Systeme, die Modellierung biologischer Systeme und die Datenanalyse. So postulierte Eugene Wigner bereits in den 1950er Jahren, dass der Abstand der Spektrallinien im Spektrum schwerer Nukleonen dem *Levelspacing* der Eigenwerte von Zufallsmatrizen entspricht. Darüber hinaus kann die Verteilung der Nullstellen der ζ-Funktion durch die Verteilung der Eigenwerte einer bestimmten Klasse von Zufallsmatrizen modelliert werden.

Grundsätzlich sind wir an den spektralen Eigenschaften von Zufallsmatrizen interessiert. Beispielsweise ist die Hesse-Matrix der potentiellen Energie von ungeordneten Vielteilchensystemen wieder eine Zufallsmatrix und ihre Eigenvektoren sind gerade die Eigenmoden des Systems. Überraschenderweise können hier viele Fragen deterministisch beantwortet werden, wenn die Matrizen unendlich groß werden. Die Eigenwerteverteilungen verschiedener Klassen von Zufallsmatrizen können gegen eine gemeinsame universelle Verteilungsfunktion konvergieren. Dies ist ein Fall einer *Konzentration des Maßes* und wird in der Physik oft als *self-averaging* bezeichnet. Betrachten wir beispielsweise eine symmetrische $N \times N$ Matrix deren Einträge gleichverteilt -1 oder 1 sind. Dann konvergiert das empirische Mass der Eigenwerte $g(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i}$ gegen das *semi-circle law*. Dieses Gesetz, zusammen mit der Eigenwertverteilung einer zufälligen 1000×1000-Matrix, ist links dargestellt. Es bleibt oft eine mathematische Herausforderung, die universelle Verteilungsfunktion für reale Systeme mathematisch abzuleiten.



In diesem Seminar führen wir die Grundbegriffe und Konzepte der Zufallsmatrizen ein. Wir diskutieren die Beweise für die Analogien des Gesetztes großer Zahlen und des zentralen Grenzwertsatzes für die Eigenwerte von Zufallsmatrizen. Besonderes Augenmerk liegt auf dem Gauss- und Wishard Ensemble für welche die deterministische Verteilungsfunktion explizit berechnet werden kann. Darüber hinaus diskutieren wir die Verteilung des größten Eigenwertes, Anwendungen in der Physik und geben eine Einführung in die freie Wahrscheinlichkeitstheorie. Letztere ist das Konzept von unabhängigen, aber nicht kommutierenden Zufallszvariablen.