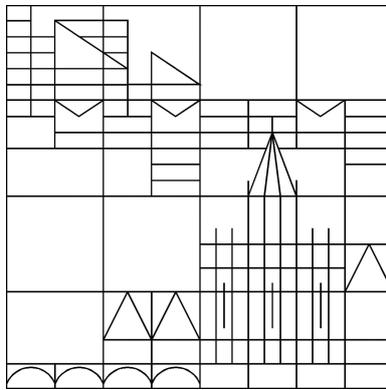


VORLESUNGSMITSCHRIFT

Stochastische Prozesse

Sommersemester 2017 (kompiliert 24. Juli 2017)



Universität Konstanz
Fachbereich Physik

Dozent: Prof. Dr. Matthias Fuchs

Abschrift: Manuel Gnann, Markus Ring, Thomas Bissinger,
Markus Gruber, Johannes Häring

Sommersemester 2017 (kompiliert 24. Juli 2017)

Vorwort

Dieses Skript begleitet die Vorlesung *Stochastische Prozesse*, gehalten von Herrn Prof. Dr. Matthias Fuchs im Sommersemester 2017 an der Universität Konstanz. Es basiert im Wesentlichen auf den Mitschriften von Manuel Gnann aus dem Sommersemester 2007 und den Erweiterungen von Markus Ring im Wintersemester 2011/2012.

Nach einigen Korrekturen hat das Skript mittlerweile einen akzeptablen Grad an Richtigkeit und Vollständigkeit erreicht. Anregungen, vor allem Hinweise auf Fehler, sind unter der E-Mail an thomas.2.bissinger@uni.kn herzlich willkommen.

Wir hoffen, dass das Skript einen verständlichen Einstieg in das Themengebiet gibt und bei Begleitung und Nachbereitung einer Vorlesung nützlich sein wird.

Manuel Gnann, Markus Ring, Thomas Bissinger, Markus Gruber, Johannes Häring

Inhaltsverzeichnis

1	Erinnerung: Wahrscheinlichkeitsrechnung	7
1.1	Definitionen	7
1.2	Variablentransformation	10
1.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	11
1.3.1	Definitionen	11
1.3.2	Elementare Beziehungen	12
1.4	(Stochastisch) unabhängige Variable	14
1.5	Der Zentrale Grenzwertsatz	18
1.6	Mehrdimensionale Gaußverteilung	21
2	Klassische Beispiele und Markow-Ketten	24
2.1	Das Ehrenfestsche Urnenmodell	24
2.1.1	Modell	24
2.1.2	Gleichgewichtsverteilung	25
2.1.3	Stationäre Verteilung	27
2.1.4	Zeitabhängigkeit des Mittelwerts	28
2.1.5	Relaxation der Varianz	30
2.1.6	Zeitabhängige Fluktuationen um das Gleichgewicht	30
2.1.7	Mikro-Reversibilität ('detailed balance')	33
2.2	Langzeitverhalten von Markow-Ketten	35
2.2.1	Markow-Kette	35
2.2.2	Ergodizität	36
2.2.3	Erzeugende Funktion	38
2.2.4	Wiederkehrzeit	39
3	Markowsche stochastische Prozesse	42
3.1	Grundlegende Definitionen	42
3.2	Weitere Definitionen & Notationen	44
4	Brownsche Bewegung	46
4.1	(Einsteinsche) Diffusionsgleichung	46
4.1.1	Hydrodynamischer Zugang	46
4.1.2	Wahrscheinlichkeitstheoretische Ableitung der Diffusionsgleichung für nicht wechselwirkende Teilchen	48
4.1.3	Stokes-Einstein-Sutherland Diffusionskoeffizient	50
4.1.4	Lösung der Diffusionsgleichung	52

4.2	Langevin-Gleichung	54
4.2.1	Alternativer Zugang zur Brownschen Bewegung	54
4.2.2	Annahmen zur stochastischen Kraft (für die Brownsche Bewegung)	54
4.2.3	Fluktuationen ums thermische Gleichgewicht	59
4.3	Brownsche Bewegung als Wiener-Prozess	63
4.3.1	Stochastische Differentialgleichung (heuristische Herleitung)	63
4.3.2	Vergrößern (coarse graining)	64
5	Langevin-Beschreibung	68
5.1	Die Allgemeine Langevin-Gleichung	68
5.2	Gaußsches weißes Rauschen und Itô-Stratonovich Dilemma	69
5.3	Kramers-Moyal-Koeffizienten	72
6	(Pauli-)Mastergleichung	75
6.1	Spezialfall der Chapman-Kolmogorov-Gleichung	75
6.2	Eigenschaften der diskreten Mastergleichung	77
6.2.1	Stationäre Verteilung	78
6.2.2	Positivität	78
6.3	Mikroreversibilität (detailed balance)	80
6.4	H-Theorem	82
6.5	Kramers-Moyal-Entwicklung	84
7	Fokker-Planck-Gleichung	86
7.1	Definition	86
7.2	Beispiele und elementare Eigenschaften	87
7.2.1	Beispiele	87
7.2.2	Eigenschaften	90
7.3	Mikroreversibilität und Fluktuations-Dissipations-Theorem (FDT)	93
7.3.1	Mikroreversibilität für kontinuierliche Zufallsvariable	93
7.3.2	Fluktuations-Dissipations-Theorem (FDT)	99
8	Korrelationsfunktionentheorie	101
8.1	Definition	101
8.1.1	Korrelator	101
8.1.2	Stationärer Fall	102
8.1.3	Zeitspiegelungssymmetrie	102
8.2	Eigenfunktionenzerlegung	103
8.2.1	Eigenfunktionenzerlegung	103
8.2.2	Darstellung der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte	103
8.3	Positiv-Definitheit & Satz von Wiener-Chintschin	104
8.3.1	Eigenfunktionenzerlegung der stationären Korrelationsfunktion	104
8.3.2	Satz von Bochner	105
8.3.3	Ergodizitäts-Hypothese und Satz von Wiener-Chintschin	106

8.4	Lineare Antwort	110
8.4.1	Suszeptibilität	110
8.4.2	Fluktuations-Dissipations-Theorem	111
8.4.3	Green-Kubo Relation	112
9	Ornstein-Uhlenbeck-Prozess	113
9.1	Charakterisierung	113
9.2	Multidimensionaler OUP	113
9.2.1	Langevin-Formulierung	113
9.2.2	Formulierung mit Kramers-Moyal-Koeffizienten	114
9.2.3	Formulierung mit Fokker-Planck-Gleichung	114
9.3	Diskussion	116
9.3.1	Relaxation ins Gleichgewicht	116
9.3.2	Stationärer Nichtgleichgewichtsfall	117
9.3.3	Nichtstationärer Fall	120
9.3.4	Mittelwerte und Korrelationsfunktionen	121
9.3.5	Sätze von Doob	122
9.3.6	Theorie der linearen Antwort	123
10	Funktionalintegralmethoden	124
10.1	Onsager-Machlup-Funktional	124
10.2	Charakteristisches Funktional des OUP	126
10.3	Martin-Siggia-Rose-de Dominicis-Jansson Funktional	127
10.3.1	Hubbard-Stratonovich Transformation	127
10.3.2	Korrelations- und Antwortfunktionen	129
10.4	Seltene Ereignisse	130
10.4.1	Instabile und metastabile Systeme	130
10.4.2	Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen	131
10.4.3	Sattelpunkts- oder WKB-Näherung	134
11	Hopfields Gedächtnis-Modell	139
11.1	Überblick über neuronale Netze	139
11.1.1	McCulloch-Pitts-Neuron	139
11.1.2	Assoziatives Speichern	141
11.1.3	Hebbsches Lernen	141
11.2	Charakterisierung von Mustern und Fixpunkten	141
11.2.1	Sequentielle deterministische Dynamik	142
11.2.2	Speichern eines Musters	142
11.2.3	Speichern mehrerer Muster	143
11.2.4	Ljapunow-Funktion symmetrischer Kopplung	143
11.2.5	Stochastische Dynamik, Mastergleichung	145
11.2.6	Reversibilität und Gleichgewicht	147
11.3	Speicherung endlich vieler Muster	149

11.4 Lösungen für endliche Speicherkapazitäten aus der Molekularfeld-	
Theorie	152
11.4.1 Das Unordnungsmittel	152
11.4.2 Ordnungsparameter, Korrelations- und Antwortfunktionen und Edward-Anderson-Parameter	153
11.4.3 Erzeugendes Funktional	153
11.4.4 Der Unabhängige-Neuronen-Prozess	154
11.4.5 Anwendung des Unordnungs-Mittels	156
11.4.6 Sattelpunktsnäherung	158
11.4.7 Gleichgewichtslösungen	159